

有、无斜撑单层单跨结构侧向刚度快速比较

摘要：主要介绍了如何快速估算有斜撑和无斜撑的单层单跨两种体系的顶点水平位移。

关键词：概念设计 斜撑 侧向刚度

Concept Design in steel structural design

ABSTRACT: how to estimate the lateral displacement for the single floor and single span braced or unbraced steel structures.

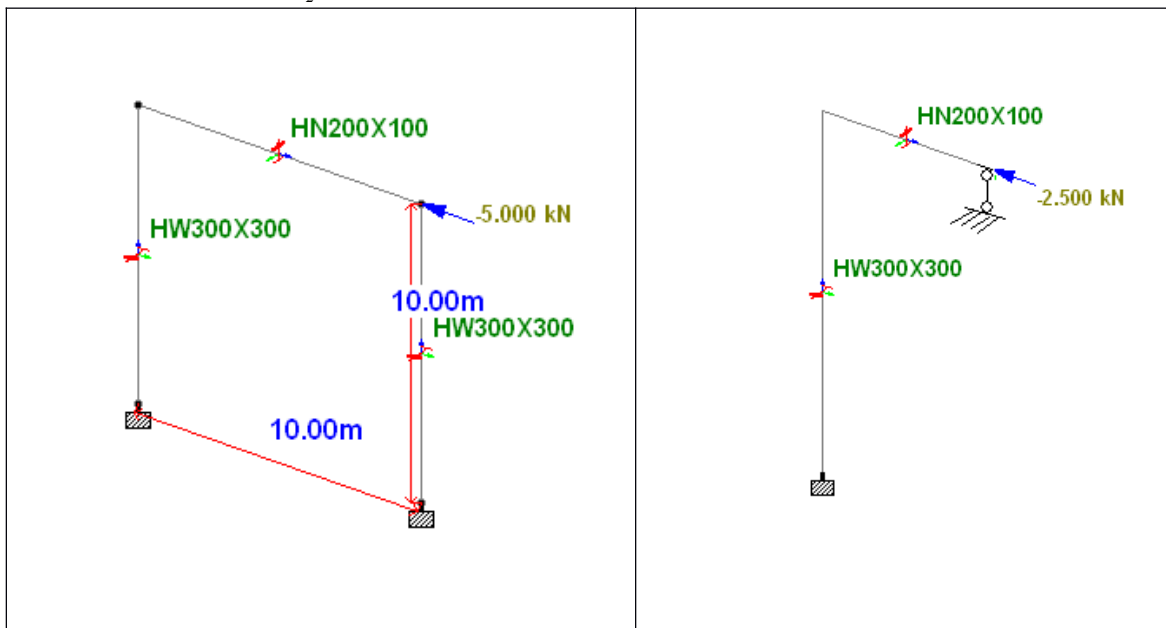
KEY WORDS: concept design, brace, lateral stiffness

近些年，各种各样的结构分析设计软件已经被国内建筑设计院所广泛采用，这也导致了一些过于依赖这些软件的工程师在力学概念把握方面的能力有所降低。林同炎先生的《结构概念和体系》一书中大量的简化计算很好地诠释了概念设计并不是拍脑袋靠感觉，而是根据力学原理把结构进行合理简化，在工程可接受的精度范围内对比不同结构方案。这是一种把复杂问题简单化、抓住主要矛盾的哲学思路，有助于把浅层的不知其所以然的感觉升华为有理论依据的经验。

本文尝试用采用这种思路并对比手算和计算软件的结果来定量地对钢结构设计中的一些常用设计方案进行快速估算，本例是单层单跨结构有斜撑和无斜撑两种情况下的侧向刚度的对比。

算例：模型如下图所示，注意柱子的摆放角度（柱腹板与刚架平面相垂直）。

为了避免跟整体坐标系的符号混淆，我们把工字形截面的局部坐标系用数字表示，弱轴用 2-2 表示，强轴用 3-3 表示。 I_2 表示绕弱轴 2-2 的惯性矩。



柱高 10m，梁跨度 10m。梁截面：HN200x100；柱截面：HW300x300， $I_2 = 6752.95 \text{ cm}^4$

这是一个反对称体系，宜将该结构简化为如右图所示的结构来求原结构的弯矩图（可以用力法或无剪力分配法求解）。在其基本体系顶点处施加单位水平荷载做出弯矩图，将基本体系的单位弯矩图和原结构的弯矩图进行图乘，即可求得顶点水平位移。

用图乘法精确求解柱顶位移且得花点时间，如果只是为了估计顶点位移在什么范围内，可以把结构简化一下，简化为梁 EI 值非常大和 EI 值非常小的两种极端情况：

极端情况一：——梁的 EI 值非常大

当把顶梁 HN200x100 换成一根更粗壮的梁，则该梁的两端的相对转角可忽略，也就是说可以认为这个结构的两个柱子顶端在刚架平面内没有转角，只有水平位移，那问题就很简单了，该结构的侧向刚度就是两根柱子的侧向刚度之和：

$$k_{unbrace_HugeBeam} = 2 * \frac{12EI_2}{h^3} = \frac{24EI_2}{h^3} = 0.334 \text{ kN/mm}$$

计算过程

柱截面：HW300x300，柱腹板与刚架平面垂直。

$$E_s := 2.06 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad I_2 := 6752.9 \text{ m}^4 \quad h := 10 \text{ m}$$

$$K_{unbrace_HugeBeam} := 2 \cdot 12 \frac{E_s \cdot I_2}{h^3} \quad K_{unbrace_HugeBeam} = 0.334 \frac{\text{kN}}{\text{mm}}$$

$$\text{Force} := 5 \text{ kN} \quad \text{disp}_{hor_HugeBeam} := \frac{\text{Force}}{K_{unbrace_HugeBeam}}$$

$$\text{disp}_{hor_HugeBeam} = 14.976 \text{ mm}$$

极端情况二：——梁的 EI 值非常小，可以认为梁只传递轴力，两柱顶均为铰接，则：

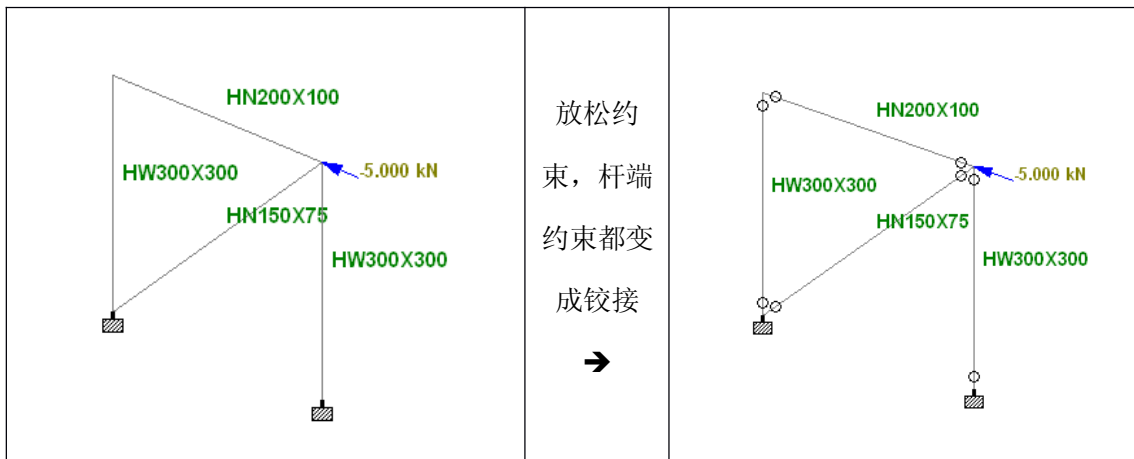
$$k_{unbrace_smallBeam} = 2 * \frac{3E_s I_2}{h^3} = \frac{k_{unbrace_HugeBeam}}{4}$$

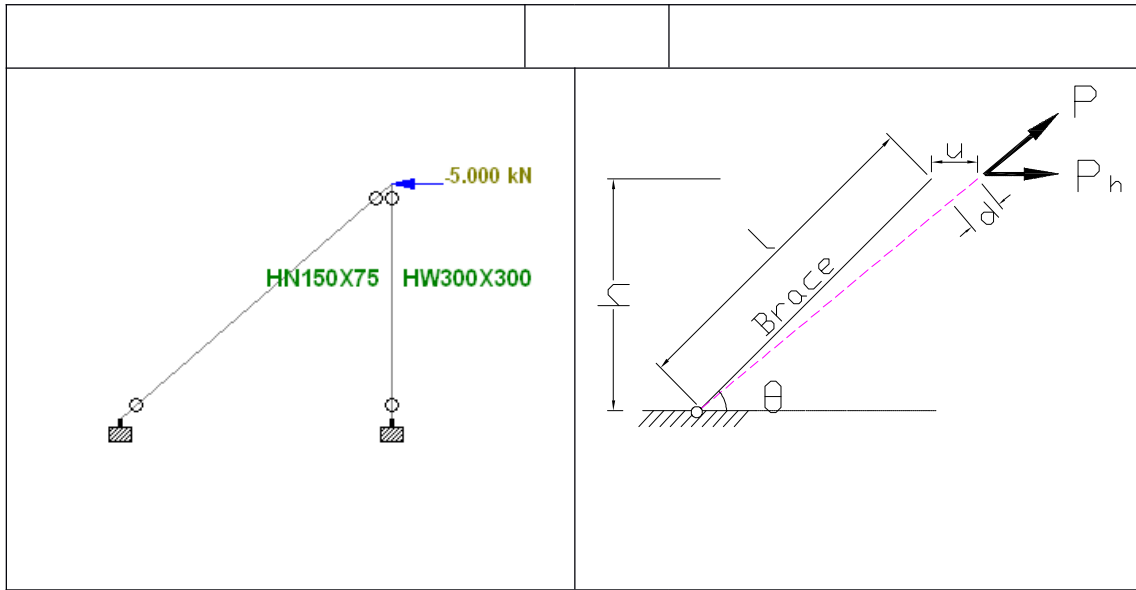
$$\text{disp}_{hor_smallBeam} = 4 * \text{disp}_{hor_HugeBeam} = 14.976 * 4 = 59.9 \text{ mm}$$

当对此结构选用不同的梁截面时，其顶点侧向位移值必在 14.976mm 与 59.9mm 之间。

现在看看给这个结构增加一根小小的斜撑后，能从多大程度上改善该结构的侧向刚度，选一根截面是 HN150x75 的小工字钢，其截面面积是 17.85 cm²。

此框架的梁和柱以及支撑之间均为固接，对这个结构动一下手术——把所有固接的节点都改成铰接，包括支座处。很显然，内部约束放松后，刚架在平面内的侧向刚度有所降低。我们来算算改造后的刚架的侧向刚度，可以看到，改造后，这实际变成了一个静定桁架，而且在只有这一个节点荷载时，这个静定桁架可以进一步简化成如下图所示。





该桁架在水平力下的变形图中各变量有如下关系：

$$p = \frac{EA}{l} * d \quad d = u * \cos \theta \quad h = l * \sin \theta$$

将以上诸式代入 $p_h = p * \cos \theta$ ，则有 $p_h = \frac{EA}{l} * (u * \cos \theta) * \cos \theta = \frac{EA}{h} * \cos^2 \theta * \sin \theta * u$

$$\text{所以, } k_{truss} = \frac{P_h}{u} = \frac{EA}{h} * \cos^2 \theta * \sin \theta \quad (1-1)$$

对于本模型， $k_{truss} = 13.00 \text{ kN/mm}$

现在比较一下有斜撑体系（简化为桁架体系）和无斜撑体系（按横梁刚度无限大考虑）的侧向刚度：

$$\frac{k_{truss}}{k_{unbrace_HugeBeam}} = \frac{\frac{EA}{h} * \cos^2 \theta * \sin \theta}{\frac{24EI_2}{h^3}} = \frac{A * \cos^2 \theta * \sin \theta * h^2}{24I_2} \quad (1-2)$$

对于本模型，上式值为 38.94。

小小一根斜撑（这几乎是中国 H 型钢截面中最小的一款了），在这个结构中使得其侧向刚度陡增将近四十倍。可以注意到，我们选择的这根斜撑是连平面外稳定的构造要求都不能满足的（长细比超过了 150），如果选择更大的截面，其增加侧向刚度的能力将更大。而且，用简化的桁架体系来估算有斜撑刚架的侧向刚度，低估了整个系统的侧向刚度（即 1-2 式的分子）；而将无斜撑刚架的梁假定为刚性梁，是过高估计了无斜撑刚架的侧向刚度（即 1-2 式的分母）。所以实际的有斜撑和无斜撑两种体系的侧向刚度的比值要比（1-2）式还要大一些。

用 STAAD 和 MTS 两种软件进行计算，结果列表如下（不考虑自重影响）：

		顶点水平位移(mm)	
		STAAD	MTS
横梁为	无斜撑	32.52mm	32.7mm
HN200x100	有斜撑	0.402mm	0.40mm

	$\frac{\quad}{\quad} =$	80.9	81.7
横梁为 HN1008x32, 模拟刚性梁	无斜撑	15.19mm	15.12mm
	有斜撑	0.397mm	0.39mm
	$\frac{\quad}{\quad} =$	38.2	38.7
估算（取横梁 为刚性梁）	无斜撑	$disp_{hor_HugeBeam} = 14.976mm$	
	有斜撑	$14.976/38.94 = 0.38mm$	

由上表可见对于有斜撑结构，粗估结果（0.38mm）和计算机求出的结果还是比较接近的，无论横梁取比较粗壮的截面还是取比较细柔的截面。对于无斜撑的结构，用图乘法进行精确计算，可以知道，影响此种结构顶点位移更接近“极端情况一”还是“极端情况二”的重要物理量实际是梁和柱的线刚度比。

从（1-2）式可以看到有无斜撑和有斜撑这两种体系的侧向刚度比值，与斜撑的横截面积成正比，与柱子的高度的平方成正比，与斜撑倾角的余弦值平方以及正弦值的乘积成正比，与柱子的绕弱轴惯性矩（对本模型而言）成反比。有了这些概念，在搞结构优化时就有的放矢了，自然很清楚调整哪几个参数对侧向刚度影响最大。

当角度保持 45°，逐渐变换框架的尺寸时，有如下结果：

h (m)	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$\frac{k_{truss}}{k_{unbrace_HugeBeam}} =$	38.939	31.5	24.9	19	14	9.7	6.23	3.5	1.55	0.389

由上述结果可以看出，在单层工业厂房中，设置柱间支撑、屋面水平斜撑对提高整个厂房的纵向刚度是多么有效和重要。在使用软件进行类似的厂房设计时，建议采用空间分析而非平面分析的程序，以便更好的计算厂房的纵向刚度、纵向侧移以及振型、周期等。

特别提示：

由于单层单跨平面框架的侧向刚度与斜撑的横截面积成正比，在节点设计阶段，我们要保证斜撑与梁或柱的连接处的节点板的横截面积不小于斜撑的横截面积，否则，在内力分析阶段应该用与节点板有效面积相当的斜撑来计算结构的侧向位移，以期计算模型能够尽可能忠实反应实际结构。

手算的好处是通过推导出的公式，可以快速了解到底是那些因素对结果有影响，有多大影响，而用计算机计算呢，貌似很快，但是要找出影响因素和变化规律，可不是仅通过区区几个计算模型进行“试算”能搞定的。合理简化并进行手算对结构工程师培养自己的力学概念帮助更大。

对于多层单跨有斜撑框架，可以将其看成一根悬臂梁，根据材料力学的公式来估算其顶点位移，也可以得到比较满意的估算结果。

参考文献：

林同炎，S.D.斯多台斯伯利，著，高立人，方鄂华，钱稼茹，译。结构概念和体系（第二版）。

中国建筑工程出版社，1999